Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для ответа

Вариант задания 2

Задача №1

Дано:
$t = 0,8\,с$
$L = 6,4\,м.$
$g = 10\,м/с^2$
Найти
v_0 - ?
a - ?

Решение: Пусть в момент времени $t = 0$ угол между $\vec{v_0}$ и горизонтом α.

$\vec{S} = \vec{v_0}t + \vec{a_0}\frac{t^2}{2}$ (уравнение равноускоренного движения)

$OX: L = v_0\cos(\alpha)t + a_{ox}\frac{t^2}{2}$ (1)

$a_{ox} = a$ (2)

При этом $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a_0}t \Rightarrow$

$\Rightarrow OX: v = v_0\cos(\alpha) + at$ (3)

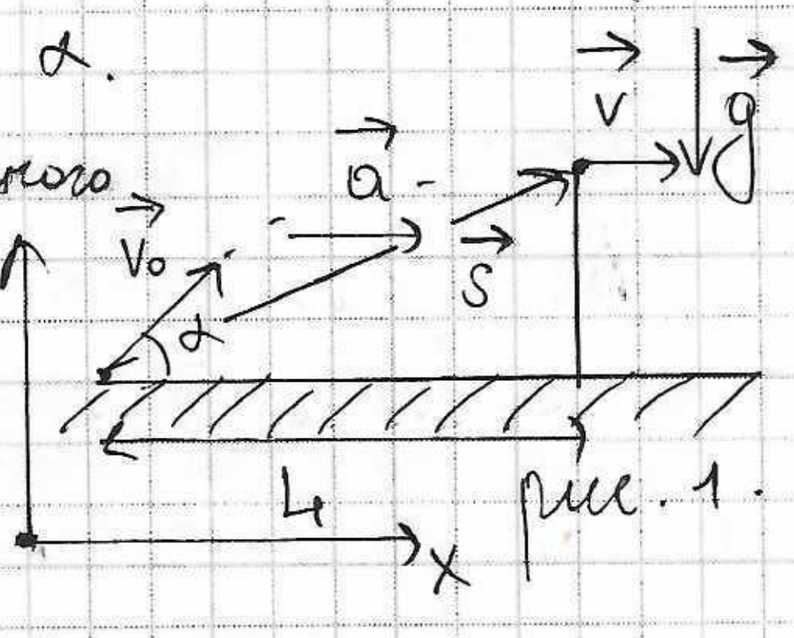


рис. 1.

Из (1), (2), (3) следует, что $L = v_0\cos(\alpha)t + \frac{t}{2}(v - v_0\cos\alpha)$ (4)

По условию $|\vec{v}| = |\vec{v_0}|$ (5) Из (4) и (5) найдем $\cos\alpha$:

$\cos\alpha = \frac{2L}{tv_0} - 1$. Отсюда $a = \frac{2v_0\left(1 - \frac{L}{tv_0}\right)}{t}$ (6)

По условию $v_y = 0$, значит из $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a_0}t$ следует

$0 = v_0\sin\alpha - gt \Rightarrow gt = v_0\sqrt{1 - \left(\frac{2L}{tv_0} - 1\right)^2} \Rightarrow g^2t^2 = \left(\frac{4L}{tv_0} - \frac{4L^2}{t^2v_0^2}\right)v_0^2$

$v_0^2t^2g^2 - 4Ltv_0 + 4L^2 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2t}\left(2Lt + \sqrt{4L^2t^2 - 4L^2t^2g^2}\right)$

$g^2t^2 = \frac{4L}{t}v_0 - \frac{4L^2}{t^2} \Rightarrow v_0 = \frac{t}{4L}\left(g^2t^2 + \frac{4L^2}{t^2}\right) \Rightarrow v_0 = 10\,\frac{м}{с}$.

~~Зная $v_0 \Rightarrow \cos\alpha$~~ Зная v_0 из (6): $a = 5\,\frac{м}{с^2}$

Ответ: $v_0 = 10\,\frac{м}{с^2}$; $a = 5\,\frac{м}{с^2}$.

Можно использовать оборот листа для записи решений

Задача 6.

Дано:
$l = 1{,}5$ м
$h = 0{,}45$ м.
$m = 0{,}1$ кг.
$g = 9{,}81$ м/с^2

T ?
v_0 ?

Движение.

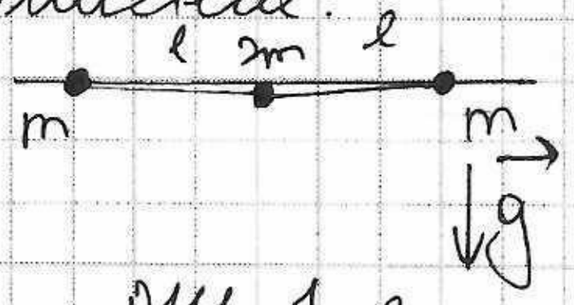


рис. 1 (система в нач. момент времени)

Рассмотрим систему в нач. момент времени. Нулевой уровень пот. энергии будет на высоте стержня. Тогда нач. пот. энергия системы 0.

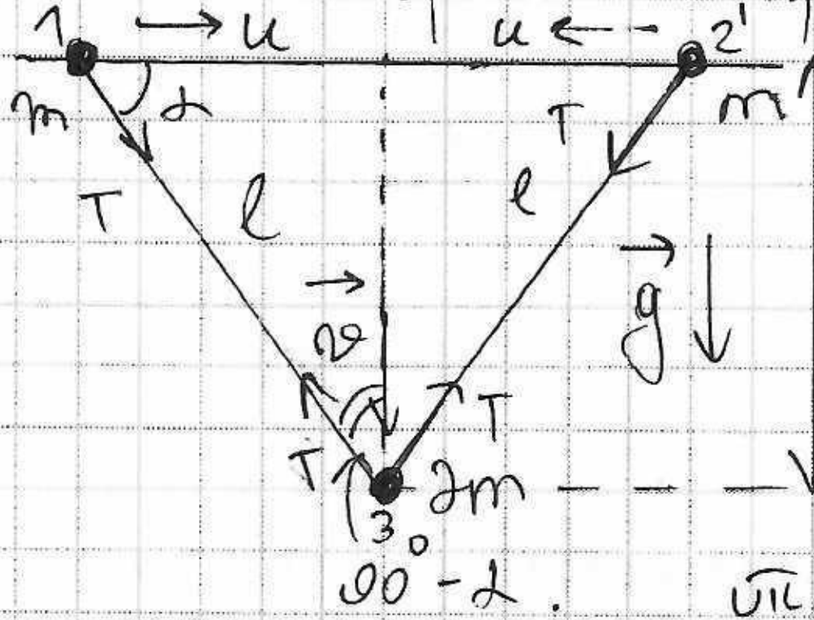


рис. 2.

Пусть скорости грузов массы m по модулю равны u (в сист. h g-ка сохранения импульсов), у $2m$ - v, сила натяжения T.
Заметим, что из кин. связи на нерастяжимость нити следует, что
$u\cos\alpha = v\sin\alpha$ (из ~~сохранения энергии~~ (α отображаем на рис. 2)
Т.к. трения нет, ЗСЭ: $E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}$
$E_{к1}$ и $E_{п1} = 0$; $E_{к2} = 2m\cdot\frac{u^2}{2} + 2m\cdot\frac{v^2}{2}$, $E_{п2} = -2mgh$.

Используя полученные соотношения: $2mgh = m(u^2 + v^2) =$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh}{1+ctg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}\cos\alpha = \sqrt{2gh}\sin\alpha$; $u = \sqrt{2gh}\sin\alpha$.

Перейдем в нисо, связанную с грузом 1. В данной со груз $2m$ вращается, двигаясь со скоростью $u\sin\alpha$ (проекция на нить)

$v\cos\alpha - u\sin\alpha$ (сонаправлены)

$= \sqrt{2gh}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Тогда в данной со на груз $2m$ действуют силы инерции F_u в противоположную a_m (по 2-му з-ну Ньютона в проекции на Ox) и $F_u = 2ma_m$, при этом $\vec{F_u} \uparrow\downarrow \vec{a_m}$

$= \frac{2gh(\cos^2\alpha - \sin\alpha)^2}{l}$

Найдем a_n.

В 2-ой з-н Ньютона на Oz: $T - 2mg\sin\alpha + T\cos(180° - 2\alpha)$

$+ 2T\cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha = 2ma_n$. Учитывая: $2m\cdot 2g\frac{h}{l}(\cos 2\alpha)^2 + 2mg\sin\alpha$

$= T(1 + 2\cos^2\alpha - \cos(2\alpha)) = T(1 + 2\cos^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)) =$

$\Rightarrow T = \frac{2mg(2\frac{h}{l}(\cos 2\alpha)^2 + \sin\alpha)}{2} = mg(2\frac{h}{l}(\cos 2\alpha)^2 + \sin\alpha)$

Из геометрии: $\sin\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{h}{l})^2} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2(\frac{h}{l})^2$

$T = mg(2\frac{h}{l}(1 - 4(\frac{h}{l})^2 + 4(\frac{h}{l})^4) + \frac{h}{l}) = mg\frac{h}{l}(3 - 8(\frac{h}{l})^2 + 8(\frac{h}{l})^4)$

$T \approx 0{,}24$ Н $0{,}60$ Н

Ответ: $T = mg\frac{h}{l}(3 - 8(\frac{h}{l})^2 + 8(\frac{h}{l})^4) \approx 0{,}24$ Н. $T \approx 0{,}60$ Н.

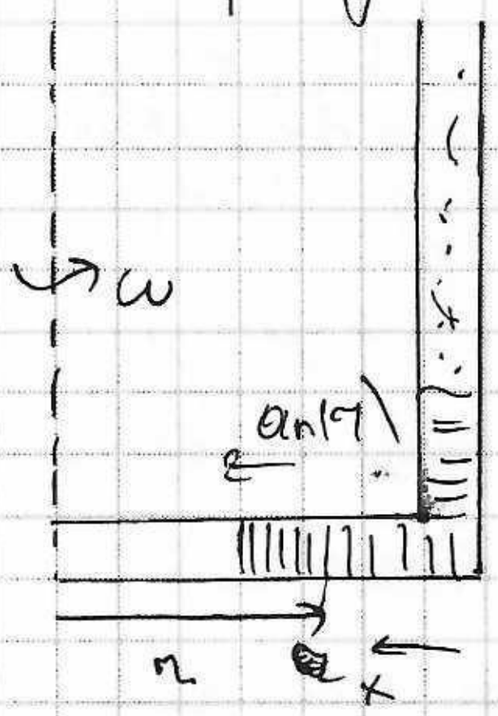
olymp.bmstu.ru

Задача №5 Решение: Рассмотрим систему после того как начали вращать трубку. До вращения давление будет было равно: $\frac{7}{2}\rho g\ell = P_0$

После смещения на a (ℓ-11 Бабия: Мариотта, $T=const$) $\frac{P_0 \cdot \ell S}{2\ell S} = \frac{P_0}{2} = \frac{7}{2}\rho g\ell$

а давление со стороны нового столба: $7\rho g\ell + 2\rho g\ell = 9\rho g\ell$

Оставшийся столб движется с ускорением (у разных точек разное ускорение). Его определяется угловой скоростью $a_n^{(7)} = \omega^2 r$. Запишем 2-ой з-н Ньютона для гор. столба:



$$-9\rho g\ell S + \frac{7}{2}\rho g\ell S = -\int_{2\ell}^{b2} \omega^2 r \cdot 2\rho dr S$$

$$\frac{11}{2}\rho g\ell S = 2\rho S\omega^2 \cdot \frac{1}{2}(36\ell^2 - 4\ell^2) \qquad 2\ell\left(\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{11}{64}\cdot\frac{g}{\ell}}$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{11}{64}\frac{g}{\ell}}$.

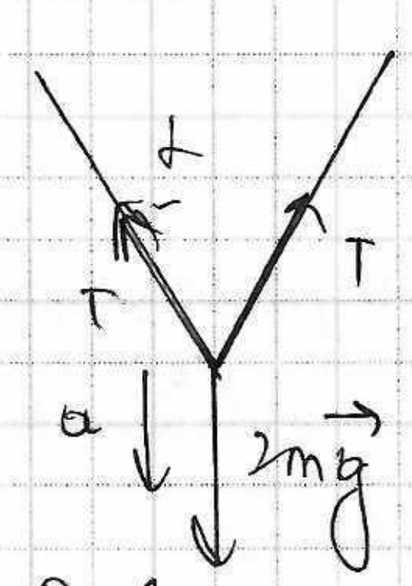
Задача №6 (продолжение). Запишем по аналогии 3с→ в проекциях момент времени: $2gh' = V^2(1+tg^2\alpha')$

$\Rightarrow V = \sqrt{2gh'}\cdot\frac{\sqrt{\ell^2-h'^2}}{\ell}$. отсюда: $\frac{dv}{dt} = dv = \frac{\sqrt{2g}}{\ell}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(\ell^2-h'^2)h'}}(\ell^2-3h'^2)$

dh'. Однако $dh' = Vdt \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = \sqrt{2gh'}\cdot\frac{\sqrt{\ell^2-h'^2}}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{\ell}\cdot\frac{(\ell^2-3h'^2)}{2\sqrt{h'(\ell^2-h'^2)}}$

$a = g\frac{\ell^2-3h'^2}{\ell^2}$. $\Rightarrow a = g\frac{\ell^2-3h^2}{\ell^2}$

Запишем 2-ой з-н Ньютона на оу:



$$2mg - 2T\sin\alpha = 2ma = 2mg\left(1 - \frac{3h^2}{\ell^2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow T = mg\frac{3h}{\ell} \Rightarrow$ ~~$T \approx 1,4$~~ Н. $T \approx 0,88$ Н

($\sin\alpha = \frac{h}{\ell}$ из геометрии) (для нахождения ускорения a брали производную $(x^n)' = nx^{n-1}$.

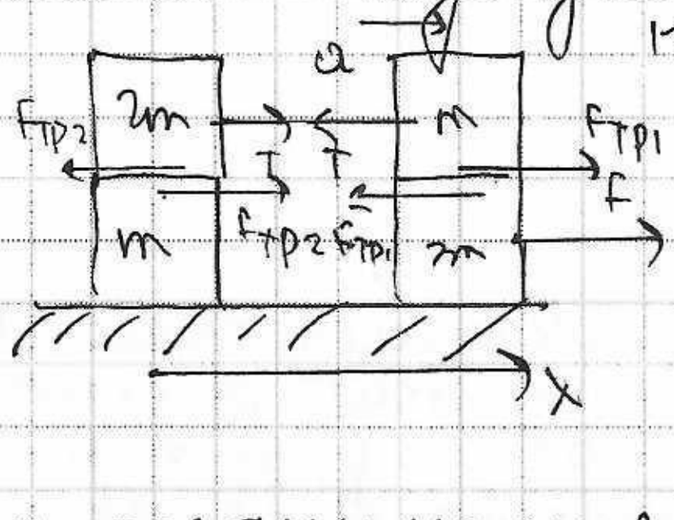
Ответ: ~~$I = 0,8$~~ $T \approx 0,88$ Н.

Задача 3.

Дано:
$T_0 = 10$ Н
$\mu = 0,5$
$m = 2$ кг
$g = 10 \frac{м}{с^2}$

Найти:
$t_{крит} - ?$

Решение: Рассмотрим момент только соприкосновения грузов (см. рисунок)



По 2 закону Ньютона на ox:
$F - F_{тр1} = 2ma$
$F_{тр1} - T = ma$.
$T - F_{тр2} = 2ma$.
$F_{тр2} = mg$

Отсюда: $F_{тр2} = ma$
$T = 3ma$
$F_{тр1} = 4ma$.
$F = 6ma$.

Поставим ограничения на $F_{тр1}$, $F_{тр2}$, T: $F_{тр1} \leq \mu mg$ (если $F_{тр1} = \mu mg$, то грузы начнут проскальзывать и все подвигаться)
$F_{тр2} < 2\mu mg$ | $T \leq T_0$. Значения, что $T_0 = \mu mg = 10$ Н, т.е
$T \leq \mu mg$. Отсюда; $\frac{2}{3}F < \mu mg$ | $\frac{F}{6} < 2\mu mg$ | $\frac{F}{2} \leq \mu mg$
или $F < \frac{3}{2}\mu mg$ | $F < 12\mu mg$ | $F \leq \mu mg$. самое строгое ограничение: $F < \frac{3}{2}\mu mg$, т.е $F < 15$ Н. Значение $F = 15$ Н достигается в момент времени 14 с, значит $t_{крит} = 14$ с

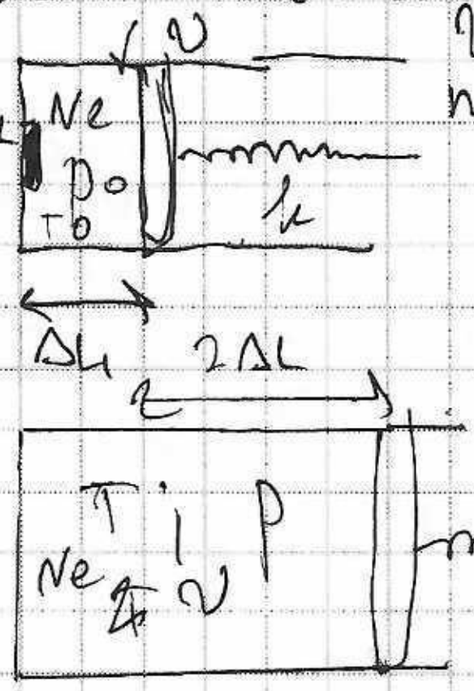
Ответ: $t_{крит} = 14$ с.

Задача 4:

Дано:
$\Delta L = 5$ см
$Q = 12$ кДж

$A - ?$

Решение: Рассмотрим систему в кон. момент.



Из равновесия поршня следует, что по 1-ому условию равновесия:
$k\Delta L_1 = p_0 S$ =>
$\Rightarrow k\Delta L_1^2 = p_0 \Delta L_1 S = \nu R T_0 = k\Delta L_1^2$

После нагрева: $3k\Delta L_1 = pS =$
$\Rightarrow 3k\Delta L_1^2 \cdot 3 = 3p\Delta L_1 S = \nu R T = 9k\Delta L_1^2$

Отсюда $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0) =$

$= \frac{3}{2} \cdot 8k\Delta L_1^2 = 12k\Delta L_1^2 = \Delta U$.

По 1-ому началу термодинамики: $Q = \Delta U + A$

С другой стороны работа газа пошла на изменение внут. пот. энергии пружины: $\Delta E_п = -k\frac{\Delta L^2}{2} + k \cdot \frac{9\Delta L^2}{2} = 4k\Delta L^2 = A$

Значит $\Delta U = \frac{1}{3}A \Rightarrow A = \frac{3}{4}Q \Rightarrow A = 9$ кДж. $\Delta U = 3A$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{Q}{4} \Rightarrow A = 3$ кДж.

Ответ: $A = 3$ кДж.

olymp.bmstu.ru

№ 4 ЗАДАЧА.

Дано:
$V_0 = 0{,}001\ м^3$
$m_0 = 0{,}72\ г.$
$T_0 = 293\ К.$
$C_{O_2} = 1000\ \frac{Дж}{К \cdot м}.$
$C_{Al_2O_3} = 1200\ \frac{Дж}{К \cdot м}.$
$T_{Al_2O_3} = 2300\ К.$
$\lambda = 405\ \frac{кДж}{моль}$

$m_{Almax} - ?$
$p_{max} - ?$

Решение:
Запишем ур-ние хим. реакции:
$4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3$
Запишем, что:
$\nu_{Al}, \nu_{O_2}, \nu_{Al_2O_3}$
$\nu_{O_2} = \frac{m_0}{2\mu_{O_2}}$
$\nu_{Al} = \frac{m_{Almax}}{\mu_{Al}} \Rightarrow$
$m_{Almax} = m_0 \Rightarrow \nu_{Al} = \frac{4}{3}\nu_{O_2} \Rightarrow$
$\Rightarrow m_{Almax} = \mu_{Al} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{m_0}{2\mu_{O_2}} \Rightarrow m_{Almax} = \frac{2}{3} m_0 \frac{\mu_{Al}}{\mu_{O_2}}$
$m_{Almax} = 0{,}4052.$

Пусть теперь $4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3$

ν_{Al}	ν_{O_2}	$\nu_{Al_2O_3}$
$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$
4ν	3ν	2ν

Количество оставшегося кислорода: $\nu_{ост_{O_2}} = \frac{m_0}{\mu_{O_2}} - 3\nu.$ (без диссоциации) $\Rightarrow m_{ост_{O_2}} = m_0 - 3\nu\mu_{O_2}.$

Кол-во кислорода, который диссоциировал: $\frac{1}{5}\frac{1}{\mu_{O_2}}(m_0 - 3\nu\mu_{O_2})$

Отсюда: $Q = \lambda\Delta\nu = \frac{\lambda}{5\mu_{O_2}}(m_0 - 3\nu\mu_{O_2})$

Эта теплота пошла на нагрев оставшегося кислорода, образование Al_2O_3.

$R T_{Al_2O_3} - \frac{5}{2}\frac{m_0}{\mu_{O_2}} R T_0 = \frac{\lambda}{5\mu_{O_2}}(m_0 - 3\nu\mu_{O_2})$. Если подставить $\Delta\nu$, то видим, что осталась 1 неизвестная ν - отсюда ν:

$\nu \approx 2{,}529 \cdot 10^{-3}$ моль. Зная ν, найдем кол-во оставшегося кислорода: $\nu_{ост_{O_2}} = \frac{6}{5}\nu_{ост} = \frac{6}{5}\left(\frac{m_0}{\mu_{O_2}} - 3\nu\right)$

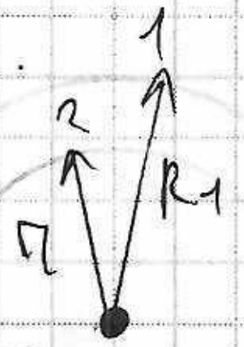
$\nu'' = 0{,}01770$ моль. Отсюда $p_{max} \cdot V_0 = \nu'' R T_{Al_2O_3}$

$p_{max} = \frac{\nu'' R T_{Al_2O_3}}{V_0} \Rightarrow p_{max} = 342\ кПа.$

Ответ: $m_{Almax} = 0{,}4052$; $p_{max} \approx 342\ кПа.$

Задача №2. Решение: Пусть время обращения планеты вокруг своей оси T, тогда, чтобы 2-ой спутник всегда пролетал 2 раза в сутки в одно и то же время должно выполняться условие: пусть первый пролёт происходит в x часов, тогда $x + 2\Delta T - T = x \Rightarrow \Delta T = \frac{T}{2}$ (ΔT - время за которое относительно поверхности планеты с планеты спутник облетит её), пусть скорость вращения планеты ω

Дано:
$T = 24$ ч
Найти
Δr_{min}



тогда, найдём ω_2 (уг. скорость 2 спутника)
$(\omega_2 - \omega)\Delta T = \omega T \Rightarrow \omega_2 = 3\omega$. 1-ый спутник - геостационарный, значит $\omega_1 = \omega$. Найдём зависимость $\omega(R)$ (R - произвольное расстояние от центра планеты)
$F = \frac{M_п m_c G}{R^2} \Rightarrow g = \frac{M_п G}{R^2} \Rightarrow \omega^2 R = \frac{M_п G}{R^2} \Rightarrow \omega = \frac{M_п G}{R^3}$, т.к $\alpha = M_п G = const$.
$\omega = \frac{\alpha}{R^3}$. Отсюда $\omega_2 = \frac{\alpha}{r^3}$; $\omega_1 = \frac{\alpha}{R_1^3} \Rightarrow R_1 = r\sqrt[3]{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$
$R_1 = \sqrt[3]{3}\, r \Rightarrow \Delta r_{min} = r(\sqrt[3]{3} - 1) \approx 0{,}44r$.
Ответ: $\Delta r_{min} = r(\sqrt[3]{3} - 1) \approx 0{,}44r$.
(P.S: $(\omega_2 - \omega)$ - отн. угловая скорость отн. планеты; $(\omega T) = 2\pi \cdot (\omega_2 - \omega)/\Delta T = 2\pi$).

Задание №5 ситуационное (продолжение)
$Q = \frac{\lambda}{5\mu_{O_2}}(m_0 - 3\nu\mu_{O_2}) = 2\nu\mu_{Al_2O_3} \cdot C_{Al_2O_3} \cdot T_{Al_2O_3} + C_{O_2}(m_0 - 3\nu \cdot \mu_{O_2})T_{Al_2O_3} - m_0 C_{O_2} T_0$. Видим, что осталась 1 неизвестная. После вычислений, получим $\nu \approx 1{,}224 \cdot 10^{-3}$ моль.
Найдём полное кол-во вещества в конце процесса.
$\nu_{полн} = \nu_{ост O_2} - \Delta\nu + 2\Delta\nu = \frac{6}{5}\left(\frac{m_0}{\mu_{O_2}} - 3\nu\right) \Rightarrow \nu_{полн} \approx 0{,}022$ моль
По з-ну Менделеева - Клапейрона: $p_{max} V_0 = \nu_{полн} R T_{Al_2O_3}$;
$p_{max} = \frac{\nu_{полн} R T_{Al_2O_3}}{V_0} \Rightarrow p_{max} \approx 432000$ Па.
Ответ: $m_{Al\,max} = 0{,}405$г; $p_{max} \approx 432000$ Па.